第 3 节 a_n 与 S_n 混搭的处理（★★★）

强化训练

1.（2023·广州模拟·★）数列$\{a_n\}$的前 n 项和 $S_n=n^2+n+1$，则$\{a_n\}$的通项公式 $a_n=$______.

答案：$\begin{cases}3,n=1\\2n,n\ge 2\end{cases}$

解析：已知 S_n 求 a_n，用 $a_n=\begin{cases}S_1,n=1\\S_n-S_{n-1},n\ge 2\end{cases}$ 计算即可，

因为 $S_n=n^2+n+1$，所以 $a_1=S_1=3$；

当 $n\ge 2$ 时，$a_n=S_n-S_{n-1}=n^2+n+1-[(n-1)^2+(n-1)+1]=2n$；故 $a_n=\begin{cases}3,n=1\\2n,n\ge 2\end{cases}$.

2.（2023·全国甲卷·★★★）已知数列$\{a_n\}$中，$a_2=1$，设 S_n 为$\{a_n\}$的前 n 项和，$2S_n=na_n$.

（1）求$\{a_n\}$的通项公式；

（2）求数列$\left\{\dfrac{a_n+1}{2^n}\right\}$的前 n 项和 T_n.

解：（1）（题干有 S_n 与 a_n 混搭的关系式，要求的是 a_n，故退 n 相减，消去 S_n）

因为 $2S_n=na_n$，所以 $2S_1=a_1$，从而 $2a_1=a_1$，故 $a_1=0$，

且当 $n\ge 2$ 时，$2S_{n-1}=(n-1)a_{n-1}$，

所以 $2S_n-2S_{n-1}=na_n-(n-1)a_{n-1}$，

故 $2a_n=na_n-(n-1)a_{n-1}$，整理得：$(n-2)a_n=(n-1)a_{n-1}$ ①，

（上式可变为$\dfrac{a_n}{a_{n-1}}$的结构，用累乘法求通项. 注意，由于有 $n-2$，故 $n\ge 3$ 时才能除过去，即只能累乘到$\dfrac{a_3}{a_2}$）

由①可得 $a_3=2a_2=2$，当 $n\ge 3$ 时，$\dfrac{a_n}{a_{n-1}}=\dfrac{n-1}{n-2}$，

所以 $a_n=\dfrac{a_n}{a_{n-1}}\times\dfrac{a_{n-1}}{a_{n-2}}\times\dfrac{a_{n-2}}{a_{n-3}}\times\cdots\times\dfrac{a_4}{a_3}\times\dfrac{a_3}{a_2}\times a_2$

$=\dfrac{n-1}{n-2}\times\dfrac{n-2}{n-3}\times\dfrac{n-3}{n-4}\times\cdots\times\dfrac{3}{2}\times\dfrac{2}{1}\times 1=n-1$，

又 $a_1=0$，$a_2=1$ 也满足上式，所以 $\forall n\in\mathbf{N}^*$，$a_n=n-1$.

（2）由（1）可得 $\dfrac{a_n+1}{2^n}=\dfrac{n}{2^n}$，

（此为“等差 ÷ 等比”结构，可用错位相减法求和）

所以$\begin{cases} T_n = \dfrac{1}{2^1}+\dfrac{2}{2^2}+\dfrac{3}{2^3}+\cdots+\dfrac{n-1}{2^{n-1}}+\dfrac{n}{2^n} & ② \\ 2T_n = 1+\dfrac{2}{2^1}+\dfrac{3}{2^2}+\cdots+\dfrac{n-1}{2^{n-2}}+\dfrac{n}{2^{n-1}} & ③ \end{cases}$，

②−③可得 $-T_n=-1-\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2^2}-\cdots-\dfrac{1}{2^{n-1}}+\dfrac{n}{2^n}=-\dfrac{1-(\frac{1}{2})^n}{1-\frac{1}{2}}+\dfrac{n}{2^n}$

$=-2+\dfrac{2}{2^n}+\dfrac{n}{2^n}=-2+\dfrac{n+2}{2^n}$，故 $T_n=2-\dfrac{n+2}{2^n}$.

3．（2022 • 新高考Ⅰ卷 • ★★★）记 S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，已知 $a_1=1$，$\left\{\dfrac{S_n}{a_n}\right\}$ 是公差为 $\dfrac{1}{3}$ 的等差数列.

（1）求 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（2）证明：$\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+\cdots+\dfrac{1}{a_n}<2$.

解：（1）（先翻译已知条件，将 $\dfrac{S_n}{a_n}$ 整体求出，得到 S_n 与 a_n 混搭的关系式）

由题意，$\dfrac{S_1}{a_1}=\dfrac{a_1}{a_1}=1$，数列 $\left\{\dfrac{S_n}{a_n}\right\}$ 是首项为 1，公差为 $\dfrac{1}{3}$ 的等差数列，

所以 $\dfrac{S_n}{a_n}=1+(n-1)\cdot\dfrac{1}{3}=\dfrac{n+2}{3}$，故 $3S_n=(n+2)a_n$，（要求的是 a_n，故考虑退 n 相减，消去 S_n）

所以当 $n\ge 2$ 时，$3S_{n-1}=(n+1)a_{n-1}$，从而 $3S_n-3S_{n-1}=(n+2)a_n-(n+1)a_{n-1}$，故 $3a_n=(n+2)a_n-(n+1)a_{n-1}$，

整理得：$\dfrac{a_n}{a_{n-1}}=\dfrac{n+1}{n-1}$，（看到 $\dfrac{a_n}{a_{n-1}}=f(n)$ 这种结构，想到用累乘法求 a_n）

所以当 $n\ge 2$ 时，$\dfrac{a_2}{a_1}=\dfrac{3}{1}$，$\dfrac{a_3}{a_2}=\dfrac{4}{2}$，$\dfrac{a_4}{a_3}=\dfrac{5}{3}$，…，$\dfrac{a_{n-1}}{a_{n-2}}=\dfrac{n}{n-2}$，$\dfrac{a_n}{a_{n-1}}=\dfrac{n+1}{n-1}$，

以上各式累乘可得 $\dfrac{a_n}{a_1}=\dfrac{3}{1}\times\dfrac{4}{2}\times\dfrac{5}{3}\times\cdots\times\dfrac{n}{n-2}\times\dfrac{n+1}{n-1}=\dfrac{n(n+1)}{2}$，结合 $a_1=1$ 可得 $a_n=\dfrac{n(n+1)}{2}$，

又 $a_1=1$ 也满足上式，所以 $a_n=\dfrac{n(n+1)}{2}(n\in\mathbf{N}^*)$.

（2）由（1）可得 $\dfrac{1}{a_n}=\dfrac{2}{n(n+1)}=2(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1})$，

所以 $\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+\cdots+\dfrac{1}{a_n}=2(1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1})=2-\dfrac{2}{n+1}<2$.

4．（2023 • 桂林模拟 • ★★★）已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，$a_1=1$，$S_n=a_{n+1}-2^n$.

（1）证明：数列 $\left\{\dfrac{S_n}{2^n}\right\}$ 为等差数列；

（2）若 $\forall n\in\mathbf{N}^*$，$(n-6)a_n\ge\lambda\cdot 2^n$，求 λ 的最大值.

解：(1)（要证的是与 S_n 有关的结论，故在 $S_n=a_{n+1}-2^n$ 中将 a_{n+1} 代换成 $S_{n+1}-S_n$，消去 a_{n+1}）

因为 $S_n=a_{n+1}-2^n$，所以 $S_n=S_{n+1}-S_n-2^n$，整理得：$S_{n+1}=2S_n+2^n$ ①，

（要证 $\left\{\frac{S_n}{2^n}\right\}$ 为等差数列，只需证 $\frac{S_{n+1}}{2^{n+1}}-\frac{S_n}{2^n}$ 为常数，故先由上式凑出 $\frac{S_{n+1}}{2^{n+1}}$ 这种结构）

由①两端同除以 2^{n+1} 得：$\frac{S_{n+1}}{2^{n+1}}=\frac{2S_n}{2^{n+1}}+\frac{2^n}{2^{n+1}}$，整理得：$\frac{S_{n+1}}{2^{n+1}}-\frac{S_n}{2^n}=\frac{1}{2}$，所以 $\left\{\frac{S_n}{2^n}\right\}$ 为等差数列.

(2)（要分析不等式 $(n-6)a_n\ge\lambda\cdot 2^n$，需求出 a_n，可先由第（1）问证得的结论求出 S_n，再求 a_n）

由（1）可得 $\frac{S_n}{2^n}=\frac{S_1}{2^1}+(n-1)\cdot\frac{1}{2}=\frac{a_1}{2}+\frac{n-1}{2}=\frac{1}{2}+\frac{n-1}{2}=\frac{n}{2}$，所以 $S_n=n\cdot 2^{n-1}$，

故当 $n\ge 2$ 时，$a_n=S_n-S_{n-1}=n\cdot 2^{n-1}-(n-1)\cdot 2^{n-2}=2n\cdot 2^{n-2}-(n-1)\cdot 2^{n-2}=(n+1)\cdot 2^{n-2}$，

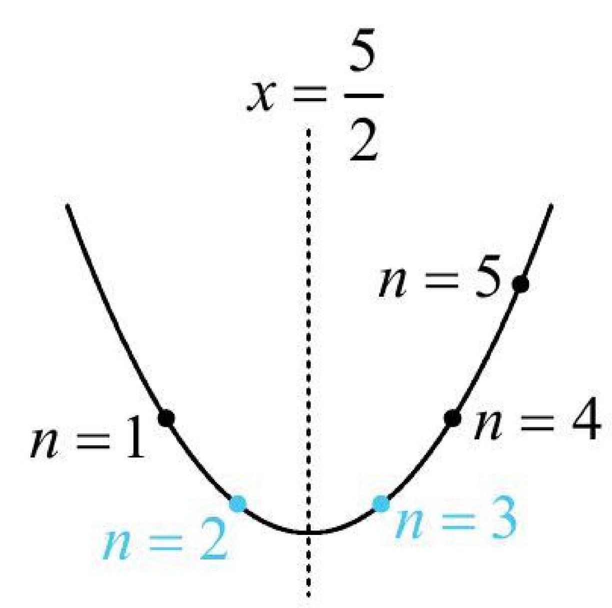
又 $a_1=1$ 也满足上式，所以 $\forall n\in\mathbf{N}^*$，都有 $a_n=(n+1)\cdot 2^{n-2}$，

故 $(n-6)a_n\ge\lambda\cdot 2^n$ 即为 $(n-6)(n+1)\cdot 2^{n-2}\ge\lambda\cdot 2^n$，也即 $\lambda\le\frac{(n-6)(n+1)}{4}=\frac{n^2-5n-6}{4}$，

（λ 应小于等于右侧的最小值，右侧是关于 n 的二次函数，故通过考虑对称轴来分析其最小值）

二次函数 $y=\frac{x^2-5x-6}{4}$ 的对称轴为 $x=\frac{5}{2}$，如图，当 $n=2$ 或 3 时，$\frac{n^2-5n-6}{4}$ 取得最小值 -3，

因为 $\lambda\le\frac{n^2-5n-6}{4}$ 恒成立，所以 $\lambda\le -3$，故 λ 的最大值为 -3.



5.（2022·成都七中模拟·★★★）已知数列 $\{a_n\}$ 为非零数列，且满足 $(1+\frac{1}{a_1})(1+\frac{1}{a_2})\cdots(1+\frac{1}{a_n})=(\frac{1}{2})^{n(n+1)}$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(2) 求数列 $\left\{\frac{1}{a_n}+n\right\}$ 的前 n 项和 S_n.

解：(1)（所给等式左侧为数列 $\left\{1+\frac{1}{a_n}\right\}$ 的前 n 项积，已知前 n 项积，可先求出通项）

由题意，$(1+\frac{1}{a_1})(1+\frac{1}{a_2})\cdots(1+\frac{1}{a_n})=(\frac{1}{2})^{n(n+1)}$ ①，所以 $1+\frac{1}{a_1}=\frac{1}{4}$，解得：$a_1=-\frac{4}{3}$；

当 $n\ge 2$ 时，$(1+\frac{1}{a_1})(1+\frac{1}{a_2})\cdots(1+\frac{1}{a_{n-1}})=(\frac{1}{2})^{(n-1)n}$ ②，

用式①除以式②可得：$1+\dfrac{1}{a_n}=\dfrac{(\frac{1}{2})^{n(n+1)}}{(\frac{1}{2})^{(n-1)n}}=(\dfrac{1}{2})^{2n}=(\dfrac{1}{4})^n$，所以 $a_n=\dfrac{1}{(\frac{1}{4})^n-1}=\dfrac{4^n}{1-4^n}$；

又 $a_1=-\dfrac{4}{3}$ 也满足上式，所以 $\forall n\in\mathbf{N}^*$，都有 $a_n=\dfrac{4^n}{1-4^n}$.

（2）由（1）可得 $\dfrac{1}{a_n}+n=(\dfrac{1}{4})^n+n-1$，（该通项由两部分相加构成，可分别求和再相加）

所以 $S_n=(\dfrac{1}{4})^1+0+(\dfrac{1}{4})^2+1+\cdots+(\dfrac{1}{4})^n+n-1=[(\dfrac{1}{4})^1+(\dfrac{1}{4})^2+\cdots+(\dfrac{1}{4})^n]+[0+1+\cdots+(n-1)]$

$=\dfrac{\frac{1}{4}[1-(\frac{1}{4})^n]}{1-\frac{1}{4}}+\dfrac{n(n-1)}{2}=\dfrac{1}{3}[1-(\dfrac{1}{4})^n]+\dfrac{n(n-1)}{2}$.

6.（2023 •湖南长沙模拟 •★★★）已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，且 $a_1+2a_2+3a_3+\cdots+na_n=(n-1)S_n+2n$.

（1）求 a_1，a_2，并求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（2）设 $b_n=\dfrac{n}{a_n^2}$，求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n.

解：（1）解法 1：（要求 a_1，a_2，可在所给等式中对 n 赋值）

因为 $a_1+2a_2+3a_3+\cdots+na_n=(n-1)S_n+2n$ ①，

所以 $a_1=2$，$a_1+2a_2=S_2+4=a_1+a_2+4$，故 $a_2=4$，

（条件等式左侧的 $a_1+2a_2+3a_3+\cdots+na_n$ 其实是 $\{na_n\}$ 的前 n 项和，故可退 n 相减，化掉和式）

由①可得当 $n\ge 2$ 时，$a_1+2a_2+3a_3+\cdots+(n-1)a_{n-1}=(n-2)S_{n-1}+2(n-1)$ ②，

用①－②可得 $na_n=(n-1)S_n-(n-2)S_{n-1}+2$ ③，

（观察发现式③有 S_n 和 S_{n-1}，故可通过调整前面的乘数，用 $S_n-S_{n-1}=a_n$ 化掉 S_{n-1} 这部分）

所以 $na_n=S_n+(n-2)S_n-(n-2)S_{n-1}+2=S_n+(n-2)(S_n-S_{n-1})+2=S_n+(n-2)a_n+2$，

整理得：$S_n=2a_n-2(n\ge 2)$ ④，

经检验，$a_1=2$ 也满足式④，所以 $\forall n\in\mathbf{N}^*$，都有 $S_n=2a_n-2$ ⑤，

（要求的是 a_n，故再由式⑤退 n 相减消 S_n）

故当 $n\ge 2$ 时，$S_{n-1}=2a_{n-1}-2$ ⑥，

由⑤－⑥可得 $S_n-S_{n-1}=2a_n-2-(2a_{n-1}-2)$，

所以 $a_n=2a_n-2a_{n-1}$，故 $a_n=2a_{n-1}$，又 $a_1=2$，所以 $\{a_n\}$ 是首项和公比都为 2 的等比数列，故 $a_n=2^n$.

解法 2：（按解法 1 得到式③后，观察发现 a_n 只出现一次，故也可将其替换成 S_n-S_{n-1}，先求 S_n）

将 $a_n=S_n-S_{n-1}$ 代入③可得 $n(S_n-S_{n-1})=(n-1)S_n-(n-2)S_{n-1}+2$，

整理得：$S_n=2S_{n-1}+2$，（要由此求 S_n，又可使用待定系数法构造，因为余下的是常数项，所以直接设 $S_n+\lambda=2(S_{n-1}+\lambda)$，则 $S_n=2S_{n-1}+\lambda$，与 $S_n=2S_{n-1}+2$ 对比可得 $\lambda=2$）

所以 $S_n+2=2(S_{n-1}+2)$，又 $S_1+2=a_1+2=4$，所以 $S_n+2=4\times 2^{n-1}=2^{n+1}$，故 $S_n=2^{n+1}-2$，

所以当 $n\ge 2$ 时，$a_n=S_n-S_{n-1}=2^{n+1}-2-(2^n-2)=2^n$，

显然 $a_1=2$ 也满足上式，故 $\forall n\in\mathbf{N}^*$，都有 $a_n=2^n$.

（2）由（1）可得 $b_n=\dfrac{n}{a_n^2}=\dfrac{n}{(2^n)^2}=\dfrac{n}{4^n}$，（此为“$\dfrac{\text{等差}}{\text{等比}}$”结构，可用错位相减法求前 n 项和）

所以 $T_n=\dfrac{1}{4^1}+\dfrac{2}{4^2}+\dfrac{3}{4^3}+\cdots+\dfrac{n-1}{4^{n-1}}+\dfrac{n}{4^n}$ ⑦，

故 $\dfrac{T_n}{4}=\dfrac{1}{4^2}+\dfrac{2}{4^3}+\dfrac{3}{4^4}+\cdots+\dfrac{n-1}{4^n}+\dfrac{n}{4^{n+1}}$ ⑧，

⑦−⑧可得 $\dfrac{3}{4}T_n=\dfrac{1}{4^1}+\dfrac{1}{4^2}+\dfrac{1}{4^3}+\cdots+\dfrac{1}{4^n}-\dfrac{n}{4^{n+1}}=\dfrac{\frac{1}{4}[1-(\frac{1}{4})^n]}{1-\frac{1}{4}}-\dfrac{n}{4^{n+1}}=\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{3}\times(\dfrac{1}{4})^n-\dfrac{n}{4^{n+1}}$

$=\dfrac{1}{3}-\dfrac{4}{3\times 4^{n+1}}-\dfrac{3n}{3\times 4^{n+1}}=\dfrac{1}{3}-\dfrac{3n+4}{3\times 4^{n+1}}$，

所以 $T_n=\dfrac{4}{9}-\dfrac{3n+4}{9\times 4^n}$.

【反思】在处理 a_n 和 S_n 混搭的关系式时，即使让求的是 a_n，也不一定消 S_n，有时消去 a_n，先求 S_n 更方便.